Loterie

Dans certaines loteries, pour gagner le plus gros gain, le billet gagnant doit avoir les mêmes nombres que les nombres tirés par le boulier. Ces nombres sont une combinaison, un sous-ensemble de l'ensemble de tous les nombres entiers entre 1 et 49. Pour qu'un billet soit gagnant pour le plus gros gain, tout ce qu'il faut pour cela c'est que chaque nombre de la combinaison tirée soit présent dans le sous-ensemble qui est la combinaison du billet. Autrement dit, les deux combinaisons doivent être les mêmes, en ne considérant pas la position de chaque nombre dans les combinaisons (parce que les positions sont probablement divergentes). Pour chaque combinaison possible, on a besoin de considérer 6 nombres différents, entre 1 et 49. Si bien qu'on peut choisir 1 nombre parmi 49 nombres différents pour le premier nombre de la combinaison, 1 parmi 48 pour le second, 1 parmi 47 pour le troisième, etc , jusqu'au dernier nombre de la combinaison, où on choisit un nombre parmi 49 moins le nombre de choix précédents, donnant 44 choix possibles pour le dernier nombre de la combinaison. En tout, on peu choisir une combinaison, parmi $49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44$ choix possibles, donc, 10068347520 choix différents. Mais ce nombre contient plusieurs choix superflus, parce que les multiplications sur les nombres entiers sont commutatives. Ce qui veut dire, que les multiplications sur les nombres entier pouvant être faits dans n'importe quel ordre, ils vont toujours donner le même résultat. Les choix additionnels sont des manières différentes de multiplier ces nombres pour donner une combinaison. Ils sont le nombre de manières différents de permuter une combinaison. Une permutation est un arrangement spécifique des nombres dans une combinaison. Pour avoir le nombre réel de combinaisons différentes possibles, on doit enlever ces choix superflus du nombre de choix possibles. Il y a 6 positions différentes où le premier choix peut se trouver dans la combinaison, et 5 pour le second, 4 pour le troisième, 3 pour le quatrième, etc. Donc, il y a $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ multiples de choix possibles de choisir une combinaison donnée dans le nombre 10068347520. Divisant 10068347520 par le factoriel de 6, on obtient 13983816.

$$\frac{49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44}{6!} = 13983816$$

Dans un tirage, une seule combinaison est choisie, parmi 13983816 choix de combinaisons. Donc, il y a une chance sur 13983816 que la combinaison du billet soit la même que la combinaison choisie. Si un billet est valide pour deux tirages, alors les chances pour que le billet soit gagnant pour le premier tirage sont les mêmes. Les chances pour le second tirage sont les même que pour le premier tirage. Parce que le billet est maintenant valide pour deux tirages, il y a maintenant une chance additionnelle que le billet soit gagnant pour les deux tirages. Si le billet est gagnant que pour un tirage, pour connaître les chances qu'il soit gagnant, il faut multiplier les chances de gagner une fois, avec les chances de perdre à l'autre tirage. Parce que c'est possible de ne gagner qu'une fois au premier, ou second tirage, pour connaître les chances totales de gagner que pour un tirage, il faut ajouter ensemble les chances de ne gagner que le premier tirage, avec les chances de ne gagner qu'au second tirage. Pour connaître les chances totales de gagner au moins une fois, pour un billet valide pour deux tirages, il faut tenir également compte de la chance de gagner aux deux tirages. Alors, les chances totales de gagner le gros lot, si le billet est valide pour deux tirages, sont :

$$\frac{2 \times 13963815}{13983816^2} + \frac{1}{13983816^2}$$

Si le billet est valide pour trois tirages, c'est un peu plus compliqué. Les chances que le billet soit gagnant pour un seul tirages, sont les chances que le billet soit gagnant pour un seul tirage, fois les chances de ne pas gagner aux deux autres tirages. C'est possible de gagner une fois seulement, à seulement un des trois tirages. C'est aussi possible de gagner deux fois, au premier et second tirages, au premier et troisième tirage, ou au second et troisième tirage. Donc il y a trois possibilités différentes de gagner deux fois le gros lot. Pour connaître le nombre total de chances de gagner, si le billet est valide pour trois tirages, il faut ajouter les chances de gagner une, deux, et trois fois. Les chances sont :

$$\frac{3 \times 13963815^2}{13983816^3} + \frac{3 \times 13963815}{13983816^3} + \frac{1}{13983816^3}$$

Maintenant, il faut parler du triangle de Pascal, nommé en honneur de Blaise Pascal. Mais en premier, il faut construire le triangle : Il faut considérer une boite, dans laquelle on met le nombre 0. On fait une infinité de copies de cette boite, et on les met tous une derrière l'autre. On a maintenant un nombre infini de boites, chacune contenant le nombre 0, en file indienne. Après, on prend ces boites, et on en fait un nombre infini de copies, et on met chaque rangée de boites copiés, les unes par dessus les autres, en décalant chaque copie de rangée, d'une demi-boite vers la droite, pour que chaque boite touche deux boites au dessus d'elle. Maintenant, pour chaque boite, on prescrit la règle qui dicte que chaque boite contient la somme des nombres contenues dans les deux boites du haut. Pour une boite au hasard, on décide que la règle ne tient pas, et on remplace le nombre qui y est contenu, par le nombre 1. Alors, le triangle de Pascal est construit. Voici un exemple de triangle de Pascal, commençant avec la boite singulière (où la règle ne tient pas) :

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \end{array}$$

Pour un billet qui est valide pour 4 tirages, le procédé pour connaître les chances de gagner est similaire. Il faut ajouter les chances de ne gagner qu'une fois, avec les chances de gagner deux fois, avec les chances de gagner trois fois, et en dernier, avec la chance de gagner à toutes les fois. Un tableau :

Nombre de tirages gagnants	Nombre de manières de gagner
1	4
2	6
3	4
4	1

On remarque dans le tableau, qu'il y a une relation entre le triangle de Pascal, et les différentes manières de gagner différents tirages, pour un billet valide pour 4 tirages. Dans le triangle, on voit également une relation entre les manières différentes de gagner pour un billet valide pour 3 tirages, et la quatrième rangée du triangle. En fait, il faut aussi considérer la troisième rangée du triangle, pour identifier une relation avec les manières de gagner, pour un billet valide pour deux tirages.

Dans les fractions précédentes, on peut voir que le numérateur de chaque fractions est les chances de ne pas gagner le gros lot pour un tirage, multiplié par lui-même le nombre de tirages pour lesquels le billet est valide moins le nombres de tirages pour pour lesquels le billet est gagnant. On peut alors trouver une formule qui va donner le nombre de chances totales de gagner le gros lot, pour un nombre arbitraire de tirages.

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \frac{13963815^{(n-i)}}{13983816^{n}}$$

On remplace le n par le nombre de tirages pour lesquels le billet est valide. On additionne successivement les différentes fractions, remplaçant le i avec un nombre entre 1 et n, et la somme est le nombre de chances totales où c'est possible de gagner le gros lot, pour un billet valide pour n tirages. Le n et le i à l'intérieur des parenthèses à côté de la fraction, se nomme le binomial. Le n indique la rangée dans le triangle de Pascal, et le i, la boite. La formule peut donner l'impression que le nombre de chances de gagner sont bonne, mais ce nombre est en fait très petit. Le nombre total de chances de ne pas gagner le gros lot sont :

$$\frac{13983815^{n}}{13983816^{n}}$$

S'il n'y a qu'une seule chance de gagner le gros lot, avec un billet valide pour un seul tirage, il y a alors toutes les autres chances pour ne pas gagner le gros lot. Pour chaque chance de ne pas gagner, il y a toutes les chances possibles de ne pas gagner aux autres tirages (si le billet est valide pour plus d'un tirage). En tout, si on achète un billet valide pour n tirages, les chances de gagner le gros lot, ou ne pas gagner le gros lot, sont de :

$$\frac{13983815^{n}}{13983816^{n}} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \frac{13963815^{(n-i)}}{13983816^{n}} = 1$$

Alors, jouer à la bourse peut être plus rentable.